

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 11 класса

Задача 1

В концах диаметра окружности расположены числа 1 и 5, разбивающие окружность на две дуги. Совершим по окружности n оборотов по часовой стрелке, приняв за начало обхода один из концов диаметра. После прохождения каждой имеющейся на данный момент дуги делим её пополам и в середине записываем число $\frac{3x+3y}{2}$, где x и y – числа, стоящие на концах пройденной дуги, взятые в порядке направления обхода. Найдите сумму всех записанных чисел после n оборотов.

Задача 2

Для зашифрования натурального числа m используется граф, представляющий собой множество вершин, некоторые из которых соединены друг с другом прямой линией. Вершины графа, соединенные друг с другом, называют *соседними*. Зашифрование состоит в выполнении следующих действий. В вершины графа записываются натуральные числа так, чтобы их сумма была равна m . Затем к числу в каждой вершине прибавляются числа в соседних вершинах. В результате получается граф, в котором «зашифровано» число m . Пример: для зашифрования числа 8 будем использовать граф на рис. 1. В его вершины поместим числа, сумма которых равна 8 (рис. 2). Затем к каждому числу прибавим числа в соседних вершинах. Результат зашифрования указан на рис. 3. На рис. 4 приведен результат зашифрования некоторого числа. Найдите его.

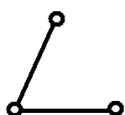


Рис. 1

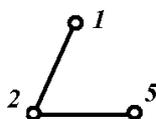


Рис. 2

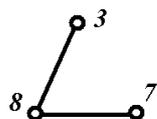


Рис. 3

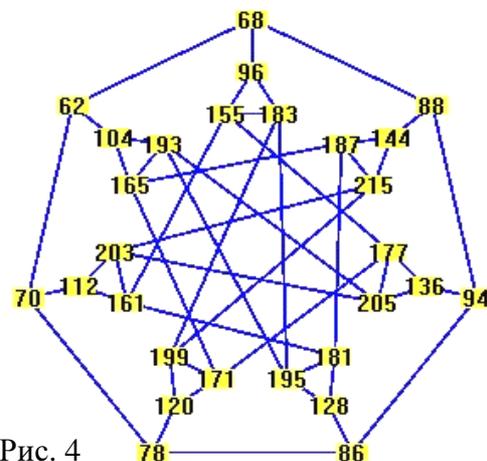


Рис. 4

Задача 3

В нейрокомпьютере используется упрощённая модель нейрона – клетки головного мозга (см. рис. 7). По четырём каналам x_1, x_2, x_3, x_4 в клетку поступают нули и единицы, из которых внутри неё формируется сумма $S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$ (a_1, a_2, a_3, a_4 – целые). Затем S сравнивается с некоторым целым параметром c , и если $S \geq c$, то на выходе клетки формируется значение $y = 1$, иначе – $y = 0$. Найдите какие-либо целые параметры a_1, a_2, a_3, a_4, c такого нейрона, чтобы $y = 1$ на наборах $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,0)$, $(0,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,1)$, $(0,0,1,1)$, $(1,1,1,1)$ и $y = 0$ – на остальных наборах.

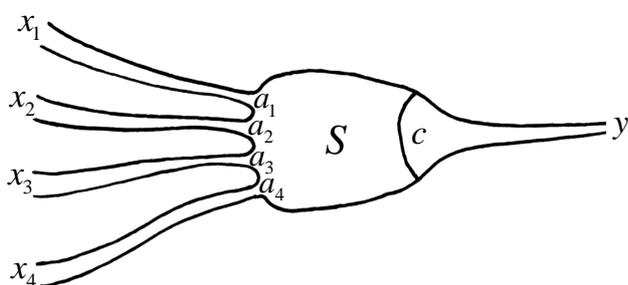


Рис. 7

Задача 4

В текстовом сообщении на русском языке, записанном без знаков препинания и пробелов, переставили буквы:

нкбакморолааентоиieb

Затем первую букву заменили буквой, следующей за ней через некоторое число позиций в алфавите расположенном на круге (см. рис. 9). Вторую букву заменили буквой, которая следует за ней через другое число позиций в алфавите и так далее. При этом одинаковые буквы могут перейти в разные, а разные – в одинаковые.

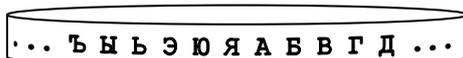


Рис. 9

После этого получили:

иклмнoиклмнoиклмнoст

И, наконец, буквы в этой строке выстроили в исходном порядке:

ИКООКМТИСОНИЛНЛКМЛМН

(то есть, если, например, первую букву исходного сообщения поставили на третье место, то теперь третью букву поставили на первое). Восстановите исходное сообщение.

Задача 5

Известно, что число 14197777 равно остатку от деления на 56887111 некоторого числа x , возведённого в куб. Числа x и 56887111 имеют общий делитель, отличный от 1, а число 56887111 является произведением двух простых чисел. Найдите хотя бы одно такое число x .

Задача 6

Крокодил Гена и Чебурашка могут связываться по двум каналам: радиоканалу и оптическому каналу. Используя эти каналы, они хотят договориться о кодовой комбинации сейфа, составленной из 20 букв **К**, **З**, **С** или **Ч**. Для этого Гена по оптическому каналу передаёт случайную комбинацию из 20 вспышек, причём каждая вспышка может быть красного (**К**), синего (**С**) или зелёного (**З**) цвета. Для каждой вспышки Чебурашка наугад выбирает светофильтр. Если его цвет совпадает с переданным цветом, то срабатывает датчик, а если не совпадает, то цвет вспышки остаётся для Чебурашки неизвестным. После замера всех вспышек Чебурашка по радиоканалу сообщает, какие светофильтры он выбрал. В результате Гена узнаёт номера вспышек, цвет которых Чебурашка определил. Гена устанавливает комбинацию на сейфе так: если цвет очередной вспышки Чебурашке определить удалось, то выбирается буква, соответствующая цвету вспышки (**К**, **З** либо **С**), если нет – выбирается **Ч**.

Шапокляк прослушивает радиоканал и «встроилась» в оптический канал. На пути передаваемых вспышек она выставляла свои светофильтры: **ККЗЗЗСКСКСЗЗСКСКСКЗК** и одновременно передавала вспышки соответствующих цветов Чебурашке. Срабатывание датчика у неё произошло на **6, 10, 11, 14, 17** и **19** вспышках. Чебурашка, не зная о вмешательстве, сообщил по радиоканалу свои цвета: **СКЗККККЗЗККССККЗСЗСК**. С учётом собранной Шапокляк информации, определите число кодовых комбинаций, которые гарантированно не открывают сейф.